

### 1.3.6 Rovnoměrný pohyb po kružnici I

**Předpoklady:** 1110, 1305

**Pedagogická poznámka:** Na začátku jsem předpokládal, že rovnoměrný pohyb po kružnici je možné probrat za jednu hodinu (díky analogii s běžným rovnoměrným pohybem). Ukázalo se, že množství nových písmenek a vzorečků (z nichž většina nových není, ale žáci to takto neberou) je v této rychlosti pro žáky nestravitelné.

Opakování z minulé hodiny: Pohyb po kružnici měříme pomocí úhlu otočení  $\varphi$ , který měříme v radiánech. Pro dráhu pohybu pak platí jednoduchý vztah  $s = \varphi r$ .

**Př. 1:** Navrhni způsoby, jak ověřit, zda je otáčení předmětu rovnoměrné.

- Změříme, jak dlouho trvá jedna otáčka. Pokud pokaždé vyjde stejné číslo, je otáčení rovnoměrné.
- Změříme počet otáček za nějakou dopředu určenou dobu. Pokud za stejnou dobu předmět vykoná vždy stejný počet otáček, je otáčení rovnoměrné.

Předchozí úvahy nejsou zcela přesné, ale použijeme je k zavedení dvou nových veličin, které popisují rovnoměrný pohyb po kružnici:

**perioda  $T$ :** doba potřebná k vykonání jedné otáčky (otočení o  $2\pi\text{rad} = 360^\circ$ ), udává se v sekundách.

**frekvence  $f$ :** počet otáček, které předmět vykoná za 1 sekundu, udává se v hertzech [1Hz].

**Př. 2:** Urči periodu a frekvenci:

- a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s,
- b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček.

a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s

Doba jedné otáčky 4 s  $\Rightarrow T = 4\text{ s}$ .

Za jednu sekundu stihneme pouze  $\frac{1}{4}$  otáčky  $\Rightarrow f = 0,25\text{ Hz}$ .

b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček

Za 1 sekundu 20 otáček  $\Rightarrow f = 20\text{ Hz}$ .

Na jednu otáčku připadne pouze  $\frac{1}{20}\text{ s} \Rightarrow T = \frac{1}{20}\text{ s} = 0,05\text{ s}$ .

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad se zdá být zbytečně lehký, ale ukázalo se, že bez něj je pro většinu žáků následující příklad téměř neřešitelný.

**Př. 3:** Urči periody a frekvence následujících pohybů:

- a) otáčení Země kolem své osy,

b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí 7200 ot/min ,

c) otáčení gramofonové desky rychlostí  $33\frac{1}{3}$  ot/min .

a) otáčení Země kolem své osy

Země se otočí kolem osy za 24 hodin  $\Rightarrow T = 24\text{ h} = 86400\text{ s}$  .

frekvence = počet otáček za 1 s

1 otáčka ... 86400 s

$f$  otáček ... 1 s

$$f = \frac{1}{86400} \cdot 1\text{ Hz} = 1,16 \cdot 10^{-5}\text{ Hz} \Rightarrow f = 1,16 \cdot 10^{-5}\text{ Hz}$$

b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí 7200 ot/min

7200 otáček ... 60 s

1 otáčka ...  $T$

$$T = \frac{60}{7200}\text{ s} = 0,0083\text{ s} \Rightarrow T = 0,0083\text{ s}$$

7200 otáček ... 60 s

$f$  otáček ... 1 s

$$f = \frac{7200}{60}\text{ Hz} = 120\text{ Hz} \Rightarrow f = 120\text{ Hz}$$

c) otáčení gramofonové desky rychlostí  $33\frac{1}{3}$  ot/min

$33\frac{1}{3}$  otáčky ... 60 s

1 otáčka ...  $T$

$$T = \frac{60}{33,3}\text{ s} = 1,8\text{ s} \Rightarrow T = 1,8\text{ s}$$

$33\frac{1}{3}$  otáčky ... 60 s

$f$  otáček ... 1 s

$$f = \frac{33,3}{60}\text{ Hz} = 0,5\text{ Hz} \Rightarrow f = 0,56\text{ Hz}$$

**Pedagogická poznámka:** Samozřejmě není v žádném případě nutné, aby žáci řešili příklady pomocí přímé úměrnosti, důležité je, aby věděli, že k vyřešení příkladu v nejhroším případě stačí trojčlenka a významy termínů perioda a frekvence.

**Př. 4:** Najdi s pomocí výpočtů předchozích příkladů vztah mezi periodou a frekvencí.

Z příkladů je vidět, že platí  $T = \frac{1}{f}$  .

Vztah odpovídá i spočteným hodnotám: větší hodnota periody znamená malou hodnotu frekvence a opačně.

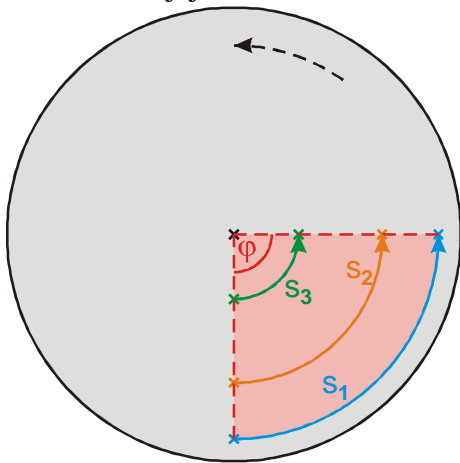
Pro frekvenci a periodu platí vztah  $T = \frac{1}{f}$ . Platí tedy  $1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$ .

Kritéria pro rovnoměrnost pohybu po kružnici z úvodu hodiny nejsou zcela správná  $\Rightarrow$  poučíme se z minulosti, kdy jsme studovali rovnoměrný pohyb (pohyb, jehož okamžitá rychlost se neměnila), pro který platilo  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konstanta}$ .

Srovnáme si veličiny pro posuvný pohyb a pohyb po kružnici:

| posuvný pohyb | pojítko         | pohyb po kružnici    |
|---------------|-----------------|----------------------|
| dráha $s$ [m] | $s = \varphi r$ | úhel $\varphi$ [rad] |

Dráhu jsme nahradili úhlem, protože úhel otočení je stejný pro všechny body na kružnici nezávisle na jejich vzdálenosti od osy.



Z obrázku (i životní zkušenosti) je zřejmé, že i rychlosti pohybu jednotlivých bodů se budou lišit (kvůli rozdílné vzdálenosti od osy se liší dráhy, které během stejné doby body urazily).  $\Rightarrow$  Zřejmě by se vyplatilo zavést rychlost, která popisuje změnu úhlu (u všech bodů se mění stejným způsobem) - **úhlovou rychlost**  $\omega$ .

**Př. 5:** Na základě analogie s nekrhovým pohybem zformuluj definici úhlové rychlosti. V jakých jednotkách se bude měřit?

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{změna dráhy}}{\text{změna času}} \Rightarrow \omega = \frac{\text{změna úhlu}}{\text{změna času}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\text{Jednotka: } \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1 \text{ rad}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ rad/s}$$

Rychlost otáčení se udává pomocí úhlové rychlosti:  $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ . Jednotkou úhlové rychlosti je rad/s.

- Př. 6:** Urči úhlovou rychlost otáčení:  
 a) kolotoče, který vykoná jednu otáčku za 4 s,  
 b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček.

Dosazujeme do vzorce  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ :

- a) kolotoč, který vykoná jednu otáčku za 4 s

$$\Delta\varphi = 1 \text{ ot} = 2\pi \text{ rad}, \Delta t = 4 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{4} \text{ rad/s} = 1,57 \text{ rad/s}$$

- b) kotoučové pily, která vykoná za 1 sekundu 20 otáček

$$\Delta\varphi = 20 \text{ ot} = 20 \cdot 2\pi \text{ rad} = 40\pi \text{ rad}, \Delta t = 1 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{40\pi}{1} \text{ rad/s} = 126 \text{ rad/s}$$

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako u periody a frekvence jsou předchozí příklady důležité pro větší úspěšnost při řešení následujícího příkladu. Občas se objevují i jiné postupy řešení (například u bodu a) v následujícím příkladu žáci počítají hodnoty pro 1 hodinu), většinou se dají využít k demonstraci toho, že všechny správné cesty vedou ke stejnému správnému cíli.

- Př. 7:** Urči úhlovou rychlost:  
 a) otáčení Země kolem své osy,  
 b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí 7200 ot/min ,  
 c) otáčení gramofonové desky rychlostí  $33\frac{1}{3}$  ot/min .

Dosazujeme do vzorce  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ .

- a) otáčení Země kolem své osy

$$\Delta\varphi = 1 \text{ ot} = 2\pi \text{ rad}, \Delta t = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400} \text{ rad/s} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

- b) otáčení plotny počítačového harddisku rychlostí 7200 ot/min

$$\Delta\varphi = 7200 \text{ ot} = 14400\pi \text{ rad}, \Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{14400\pi}{60} \text{ rad/s} = 754 \text{ rad/s}$$

- c) otáčení gramofonové desky rychlostí  $33\frac{1}{3}$  ot/min

$$\Delta\varphi = 33\frac{1}{3} \text{ ot} = \frac{100}{3} \text{ ot} = \frac{100}{3} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{200\pi}{3} \text{ rad}, \Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{200\pi}{3}}{60} \text{ rad/s} = 3,49 \text{ rad/s}$$

**Př. 8:** Rozhodni, jaká veličina se udává v jednotce otáčky/min, a najdi její převodní vztah k základní jednotce této veličiny.

Dvě možnosti:

- otáčky/min : podíl úhlu (změny úhlu) a času  $\Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$  - jde o úhlovou rychlost  $\Rightarrow$  základní jednotka rad/s.

$$\text{Převod: } 1 \frac{\text{ot}}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s.}$$

- otáčky/min : počet otáček za jednotku času  $\Rightarrow$  frekvence za nestandardní jednotku času  $\Rightarrow$  základní jednotka Hz.

$$\text{Převod: } 1 \frac{\text{ot}}{\text{min}} = \frac{1 \text{ ot}}{60 \text{ s}} = \frac{1}{60} \text{ Hz.}$$

Mezi frekvencí a úhlovou rychlost vlastně není (kromě jednotek) rozdíl, proto bývá úhlová rychlost mnohdy označována jako úhlová frekvence.

**Př. 9:** Najdi vztah mezi úhlovou rychlostí  $\omega$  otáčení předmětu a velikostí okamžité rychlosti  $v$  bodu, který leží na tomto předmětu ve vzdálenosti  $r$  od osy otáčení.

Hledáme pojítka mezi úhlovou a normální veličinou, jedno už máme  $s = \varphi r \Rightarrow$  zkusíme jej využít:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 r - \varphi_1 r}{\Delta t} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) r}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega \cdot r$$

**Shrnutí:** Všechny body na otáčejícím se předmětu se pohybují se stejnou úhlovou rychlostí. Jejich obvodové rychlosti závisí na vzdálenosti od středu otáčení, a proto se liší.